Calcul intégral

1. Savoir

1.1. Définitions

1.1.1. Aire sous la courbe

Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux nombres réels de I :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.1.2. Valeur moyenne d'une fonction

Si f est une fonction continue sur [a, b], avec a≠b, on appelle valeur moyenne de f sur [a, b] le réel $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

1.2. Propriétés

1.2.1. Relations de Chasles

Si f est continue sur I et que a, b, c ∈ I :

- $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

1.2.2. Linéarité

Si f et g sont continues sur I, pour tout a et b ∈ I :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Et pour tout α ∈ ℝ :

$$\int_a^b \alpha\, f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

1.2.3. Positivité et ordre

Si f et g sont deux fonctions continues sur [a, b] :

• Si f est positive : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

• Si f est négative : $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

• Si f ≤ g sur [a, b] : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

1.2.4. Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur [a, b], avec m ≤ f ≤ M, et $\boldsymbol{\mu}$ sa valeur moyenne, alors :

• $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

• $m \leq \boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{M}$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

1.2.5. L'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telles que u' et v' soient continues sur I, alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Pour le choix de u et v', on recherchera dans cet ordre :

1. ***L**ogarithme*
2. ***P**olynôme*
3. ***E**xponentielle*
4. ***T**rigonométrie*

Le premier trouvé sera u(x), le deuxième sera v'(x)

1.2.6. Aires

1.2.6.1. Sous une courbe

L'aire A, en unités d'aires, de la partie du plan délimité par l'axe des abscisses, les droites x=a et x=b et la fonction f est :

- Si f est positive sur [a, b]: $A = \int_a^b f(x)dx$
- Si f est négative sur [a, b]: $A = -\int_a^b f(x)dx$

Attention : Si f passe successivement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, il faudra utiliser la linéarité de l'intégrale pour calculer séparément chaque aire ainsi délimitée.

1.2.6.2. Limitée par deux courbes

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, avec g(x) ≤ f(x), alors :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

1.2.7. Volumes d'un solide de révolution

Lorsqu'on fait tourner une courbe autour d'un axe (ici l'axe des abscisses), on engendre un volume de révolution.

Soit V, ce volume, on a :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

2. Savoir-faire

2.1. Calculer une intégrale

$$\text{Calculer I} = \int_0^1 \frac{5x}{(x^2+1)^2}dx$$

Corrigé :

$$Il\ est\ clair\ que : \frac{5x}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$On\ a\ donc : \int_0^1 \frac{5x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{5}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{5}{2}\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\left(\frac{-1}{2}+1\right) = \frac{5}{4}$$

Conseil : si vous avez des difficultés dans la recherche des primitives, révisez le chapitre sur les primitives. Il est inutile de faire du calcul intégral sans maitriser les primitives.

2.2. Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Calculer la valeur moyenne m sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de $f(x) = \cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$

Corrigé :

$$m = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ (x)dx = \frac{2}{\pi}[sin\ (x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(sin\frac{\pi}{2} - sin\ 0\right) = \frac{2}{\pi}$$

2.3. Utiliser la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale

Etudier le sens de variation de la suite : $U_n = \int_0^n \frac{-x^2}{e^x+1}dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Corrigé :

$$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}, on\ a\ U_{n+1} = \int_0^{n+1} \frac{-2}{x+1}dx$$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

$$Donc : U_{n+1} - U_n = \left(\int_0^{n+1} \frac{-2}{x+1} dx \right) - \left(\int_0^{n} \frac{-2}{x+1} dx \right)$$

$$= \left(\int_0^{n+1} \frac{-2}{x+1} dx \right) + \left(\int_n^{0} \frac{-2}{x+1} dx \right) = \left(\int_n^{0} \frac{-2}{x+1} dx \right) + \left(\int_0^{n+1} \frac{-2}{x+1} dx \right)$$

$$= -2 \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1} dx = -2[ln(x+1)]_n^{n+1} = -2[ln(n+2) - ln(n+1)]$$

$$= -2\left(ln \frac{n+2}{n+1} \right)$$

$$Or, \frac{n+2}{n+1} > 1 \ donc \ ln \frac{n+2}{n+1} > 0, d'où - 2\left(ln \frac{n+2}{n+1} \right) < 0$$

La suite U_n est donc décroissante

2.4. Utiliser la positivité de l'intégrale

Démontrer sans calculer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\, dx$ est négative

Corrigé :

$$Comme\ pour\ tout\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ on a } \cos(x) \leq 0, alors \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\, dx \ \leq 0$$

2.5. Encadrer avec les inégalités de la moyenne

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{on donne } I_n = \int_n^{n+1} e^{1/x} dx$$

Montrer que I_n tend vers 1 en $+\infty$

Corrigé :

$e^{1/x}$ *est continue et strictement décroissante sur* $]0; +\infty[$.

$$Pour\ x \in [n; n+1], on\ a\ donc : e^{1/n+1} \leq \ e^{1/x} \leq e^{1/n}$$

$$Par\ les\ inégalités\ de\ la\ moyenne : [(n+1) - n]e^{1/n+1} \leq \int_n^{n+1} e^{1/x} dx \leq [(n+1) - n]e^{1/n}$$

$$D'où : \mathrm{e}^{1/_{n+1}} \leq \int_{n}^{n+1} \mathrm{e}^{1/_x}\mathrm{dx} \leq \mathrm{e}^{1/_n}$$

$$Or, \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{1/_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{1/_n} = 1,$$

$$Par\ le\ théorème\ des\ gendarmes, on\ a\ donc\ \lim_{x\to+\infty} I_n = 1$$

2.6. Intégrer par parties

Calculer l'aire du domaine situé sous la courbe d'équation $y = xe^x$ pour $x \in [0; 1]$

$$La\ fonction\ x \mapsto xe^x\ est\ continue\ et\ positive\ sur\ [0;1].$$

$$L'aire\ du\ domaine\ cherché\ est\ donc : \int_0^1 xe^x dx$$

$$Il\ est\ nécessaire\ ici\ d'intégrer\ par\ parties\ en\ posant : \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$$

$$Toutes\ ces\ fonctions\ étant\ continues\ sur\ [0;1], on\ a:$$

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1UA\ (Unités\ d'aire)$$

__Conseil :__ cherchez correctement et dans l'ordre les fonctions Logarithme, Polynôme, Exponentielle et Trigonométrique. La 1ère trouvée étant u(x) et la 2nde étant v'(x). Attention toutefois à ne pas mentionner cela sur votre copie de bac ou d'interrogation, ceci n'étant pas une règle de cours, seulement une astuce !

2.7. Calculer une aire

Dans un repère orthonormal d'unité graphique 3 cm, soit $f(x) = \sin(x)$ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculer l'aire limitée par f(x), l'axe des abscisses, $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

Corrigé :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\,dx = \overbrace{-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sin(x)\,dx}^{puisque\ sin(x) est <0\ sur\left[-\frac{\pi}{2};0\right]} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\,dx = [cos\,(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-cos\,(x)]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [1-0] + [0-(-1)] = 2UA = 18cm^2$$

Conseils :

- Si vous trouvez une intégrale nulle (ce qui aurait été le cas ici si nous n'avions pas pris en compte la partie située sous l'axe des abscisses) ou négative, pensez à dessiner la courbe pour voir comment elle se comporte et faire la séparation en utilisant la linéarité.
- Faites attention à l'unité graphique chaque fois que vous calculez une surface. N'oubliez pas de multiplier votre résultat par le carré de l'unité graphique.

2.8. Calculer un volume

Soit un repère orthonormal (0 ;x ;y ;z) de l'espace et d'unité graphique 2 cm. Soit f la fonction définie sur [0 ;2] par $f(x) = x^2$

Calculer, à 10^{-1} près, le volume V du solide engendré par la révolution autour de l'axe x'x de la courbe d'équation $y=x^2$ sur [0 ;2].

Corrigé :

$$V = \pi\int_{0}^{2} (x^2)^2 dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}UV = \frac{128\pi}{5}cm^3 \approx 80{,}4\ cm^3$$

Conseils :

- Ne soyez pas bloqués par l'utilisation certains termes et familiarisez vous avec eux. Révolution = rotation / axe x'x = axe des abscisses…
- Faites attention à l'unité graphique chaque fois que vous calculez un volume. N'oubliez pas de multiplier votre résultat par le cube de l'unité graphique.

3. Démonstrations

3.1. Relations de Chasles

- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b = \cancel{F(c)} - F(a) + F(b) - \cancel{F(c)}$

$$= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

- $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -[F(x)]_b^a = -\int_b^a f(x)dx$

3.2. Linéarité

- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = [F(x)+G(x)]_a^b = F(b)+G(b) - [F(a)+G(a)] =$

$$= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- $\int_a^b \alpha\, f(x)dx = [\alpha F(x)]_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha[F(b) - F(a)] = \alpha[F(x)]_a^b = \alpha \int_a^b f(x)dx$

3.3. Positivité et ordre

Si f et g sont deux fonctions continues sur [a, b] :

- Si f est positive sur [a; b] son intégrale est une aire, donc : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

- Si f est négative sur [a; b] son intégrale est l'opposé d'une aire, donc : $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

- Si f ≤ g sur [a, b], $f - g$ *est continue et négative, son intégrale est négative donc :*

$$\int_a^b (f-g)(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

3.4. *Inégalités de la moyenne*

Soit f une fonction continue sur [a, b], avec m≤f≤M, alors :

- $m \leq f \leq M \Leftrightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx \Leftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

3.5. *L'intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telles que u' et v' soient continues sur I, comme (uv)'=u'v+uv', alors :

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = [(uv)(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$